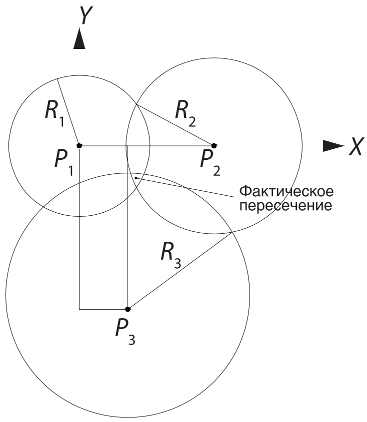

Рис. 77. Область реального пересечения

ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определим координаты воздушного судна $P^T = (x, y, z)$, в произвольный момент времени t, оставив пока без внимания погрешность измерений, зная, что летательный аппарат находится на расстоянии 2 от источников с известными координатами, равными:

$P_1{}^T = (1, 1, 1)$;
$P_2{}^T = (2, 0, 1)$;
$P_3{}^T = (1, 2, 0)$.

Вариант 1 – упрощенный

Для решения задачи поступим так, как показано на общем примере.

Рассчитаем R_i^2, для $i = 1, 2, 3$.

$$R_1{}^2 = R_2{}^2 = R_3{}^2 = 4.$$

Рассчитаем S_i^2, для $i = 1, 2, 3$.

$$S_1{}^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = 3,$$

$$S_2{}^2 = 5, \quad S_3{}^2 = 5.$$

Построим A, d, β.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

det $A = 1$, поэтому A обратимо; станции не находятся на одной линии.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из (33) следует:

$$a = 1 + d^T A^{-T} A^{-1} d = 1 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$b = 2P_{h1}{}^T A^{-1} d - 2z_1 - 2d^T A^{-T} A^{-1} \hat{a} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 - 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$c = S_1^{\ 2} - 2P_{h1}^{\ T} A^{-1}\hat{a} - R_1^{\ 2} + \hat{a}^T A^{-T} A^{-1}\hat{a} = 3 - 2(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\,.$$

Поэтому (32) приобретает следующий вид:

$3z^2 - 2 = 0$.

Решением является:

$z' = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $z'' = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Учитывая, что воздушное средство движется над поверхностью Земли, придерживаться надо решения z'.

Помня о (35), получаем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}\right].$$

Из чего вытекают значения x и y.

$x = 2 + \sqrt{\frac{2}{3}}$; $y = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Отсюда следует, что местоположением воздушного средства в момент времени t является

$P^T = \left(2 + \sqrt{\frac{2}{3}},\ 1 + \sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Вариант 2 – развернутая форма

Перепишем (1) по трем источникам.

1. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.
2. $(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 4$.
3. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 = 4$.

Раскрыв скобки в трех уравнениях, получаем:

1. $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 4$.
2. $x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 4$.
3. $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 = 4$.

При переставлении получаем:

1. $4 = 3 - 2x - 2y - 2z + x^2 + y^2 + z^2$.
2. $4 = 5 - 4x - 2z + x^2 + y^2 + z^2$.
3. $4 = 5 - 2x - 4y + x^2 + y^2 + z^2$.

Вычитаем 1-е из 2-го и 1-е из 3-го и получаем

$(2-1) \to (4-4) = (5-3) - 2(2-1)x - 2(0-1)y - 2(1-1)z$,

$(3-1) \to (4-4) = (5-3) - 2(1-1)x - 2(2-1)y - 2(0-1)z$.

Что можно записать как

$2(2-1)x + 2(0-1)y = (5-3) - (4-4) - 2(1-1)z$,

$$2(1-1)x+2(2-1)y=(5-3)-(4-4)-2(0-1)z$$

или как

$$x-y=\frac{(5-3)-(4-4)}{2}-(0)z\ ,$$

$$0(x)+y=\frac{(5-3)-(4-4)}{2}-(-z)\,.$$

Записав это уравнение в виде матрицы при

$P_h{}^T = (x, y)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix},\ \hat{a}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

С учетом того, что A не единично, действительно, det A = 1, существует матрица, обратная A. Поэтому имеет место соотношение

$$P_h=A^{-1}(\beta-dz)\,.$$

Учитывая, что 1 может быть записано в форме, аналогичной уравнению (29), после подстановки получим:

$$4=3-2\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}z\right]-2z(1)+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}z\right]\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}z\right]+z^2\rightarrow$$

$$4=3-2\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z\\ z\end{pmatrix}\right]-2z+\left[\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z & z\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z\\ z\end{pmatrix}\right]+z^2\rightarrow$$

$$4=3-2\begin{pmatrix}3 & 2z\end{pmatrix}-2z+(5+3z+3z+2z^2)+z^2\rightarrow$$

$$4=3-6-4z-2z+5+6z+3z^2\,.$$

Сделаем перестановку:

$$3z^2-2=0\,.$$

Отсюда очевидно, что

$z' = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $z'' = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

Подставив значения z' в (36) и (37), получим значения неизвестных x и y.
А именно:

$$x=\frac{1}{1}\left[(1)1-(-)1\right]+\left\{-\frac{1}{1}\left[(1)(0)-(-1)(-1)\right]\right\}\sqrt{\frac{2}{3}}\rightarrow 2+\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,$$

$$y=\frac{1}{1}\left[-(0)1+(1)1\right]+\left\{-\frac{1}{1}\left[-(0)(0)+(1)(-1)\right]\right\}\sqrt{\frac{2}{3}}\rightarrow 1+\sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

Из этого следует, что местоположением воздушного средства в момент времени t является

$P^T = (2 + \sqrt{\frac{2}{3}}, 1 + \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$.